

# Le serie di funzioni e le serie di potenze

## 1) Le successione di funzioni

- **Successione di funzioni in**  $A$ : è l'insieme di funzioni  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ , con indice  $n \in \mathbb{N}$ , e definite nell'insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ .
- La successione di funzioni  $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ , **converge puntualmente** in  $E \subseteq A$ , se è convergente  $\forall x \in E$ .
- **Limite della successione:** la funzione  $f(x)$  tale che  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x), \forall x \in E$ .

## 2) Che cos'è una serie di funzioni

- Data una successione di funzioni  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ , con  $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ , si chiama **serie di funzioni** in  $A$  la successione  $s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots, x \in A \subseteq \mathbb{R}$ , con  $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ .

La serie di funzioni si indica  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ .

- La funzione  $f_n(x)$  è detta **termine n-esimo** o **generale** e ogni funzione  $s_n(x)$  **ridotta n-esima**.

**ESEMPIO:** Nella serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos^n x, x \in \mathbb{R}$ , il termine generale è  $\cos^n x$ , la ridotta  $n$ -esima è  $\cos x + \cos^2 x + \dots + \cos^n x$ .

- Una serie di funzioni  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n, x \in A \subseteq \mathbb{R}$ , nel punto  $c \in A$ :

- **convergente puntualmente** al numero  $s \in \mathbb{R}$ , se  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c) = s$ ;
- **divergente positivamente (negativamente)** se  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c) = +\infty (-\infty)$ ;
- **è indeterminata** se  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c)$  è indeterminata.

- Data la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ , il suo **resto n-esimo** è la serie  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ . La sua somma si indica con  $r_n(x)$ .

- **L'insieme di convergenza di una serie di funzioni**  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), x \in A \subseteq \mathbb{R}$ , è l'insieme  $E \subseteq A$  dei numeri per i quali la serie di funzioni si trasforma in una serie numerica convergente.

- **Somma della serie:** è la funzione  $E \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x), \forall x \in E$ .

## 3) Che cos'è una serie di potenze

- Una serie di funzioni si dice serie di potenze con centro  $x_0$  se è della forma:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$  con  $x_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ , sono numeri reali e  $x$  è la variabile reale.

I numeri  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  sono detti coefficienti della serie.

Nel caso in cui  $x_0=0$  si ha:  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ .

### ■ Teorema del rapporto

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \alpha$ , allora:

- $r = \frac{1}{\alpha}$ , se  $\alpha \neq 0$ ;
- $r = +\infty$ , se  $\alpha = 0$ ;
- $r = 0$ , se  $\alpha = +\infty$ ;

### ■ Teorema della radice

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$ , allora:

- $r = \frac{1}{\alpha}$ , se  $\alpha \neq 0$ ;
- $r = +\infty$ , se  $\alpha = 0$ ;
- $r = 0$ , se  $\alpha = +\infty$ ;

### ■ Teorema di continuità

Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  una serie di potenze e sia  $r$  il suo raggio di convergenza. La funzione

somma  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  è continua per ogni  $x \in (-r; r)$ .

Si noti che non si può affermare nulla, in generale, sulla continuità di  $f(x)$  per  $x = \pm r$ .

### ■ Teorema di integrazione

Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  una serie di potenze e sia  $r$  il suo raggio di convergenza. La funzione somma

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  è integrabile in qualsiasi intervallo  $[a; b]$  con  $-r < a < b < r$ , e risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x dx + \int_a^b a_2 x^2 dx + \dots + \int_a^b a_n x^n dx + \dots$$

ossia

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b a_n x^n dx \right) \quad (2)$$

In pratica ciò significa che la serie si può integrare termine a termine o, anche, che si può portare il segno di integrale dentro al segno di serie (l'integrale di una serie è la serie degli integrali).

Si noti che, calcolando gli integrali che compaiono nel secondo membro della (2), si ottiene:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

### ■ Teorema di derivazione

Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

con raggio di convergenza  $r \neq 0$  e detta  $f(x)$  la somma della serie, si può derivare termine a termine la serie (1) per ogni  $x$  interno all'intervallo di convergenza e risulta

$$f'(x) = a_0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots \quad x \in (-r; r).$$

Si noti che la tesi del teorema può anche essere scritta così:

$$D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D(a_n x^n)$$

oppure

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$

In altre parole, per una serie di potenze, la derivata di una serie è la serie delle derivate.

#### 4) Lo sviluppo in serie

##### ■ Serie di Taylor

Se la funzione  $f(x)$  è indefinitamente derivabile in un intorno  $I$  di  $x_0$ , diciamo **serie di Taylor** relativa a  $f(x)$  e al punto iniziale  $x_0$  la serie di potenze di  $(x - x_0)$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots$$

##### ■ Se $x_0 = 0$ , otteniamo la **serie di Mac-Laurin**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

##### ■ Una funzione $f(x)$ , indefinitamente derivabile in un intorno $I$ di $x_0$ , si dice **sviluppabile in serie di Taylor** nel punto $x_0$ se coincide con la somma della sua serie di Taylor, ossia se:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad \forall x \in I.$$

##### ■ In particolare, se $x_0 = 0$ , la funzione si dice **sviluppabile in serie di Mac-Laurin**.

##### ■ **Condizione sufficiente per la sviluppabilità**

Data un funzione  $f(x)$  derivabile indefinitamente in un intorno  $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$  di  $x_0$ , se esiste un numero  $L > 0$  tale che  $|f^{(n)}(x)| \leq L, \forall x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ , allora  $f(x)$  è sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno  $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$  con punto iniziale  $x_0$ .

#### 5) Applicazioni degli sviluppi in serie

##### ■ Le principali **applicazioni degli sviluppi in serie** riguardano:

- il calcolo di limiti;
- il calcolo approssimato dei valori di una funzione;
- il calcolo approssimato di integrali. [ non è in programma]