

# Le Serie numeriche

## 1) Che cos'è una serie numerica

- Data una successione di numeri,  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , si chiama **serie numerica** la successione dei numeri  $s_1 = a_1$ ,  $s_2 = a_1 + a_2$ ,  $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ ,  
 $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots$

Si indica con  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  oppure  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  sono i **termini** della serie e  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$  sono le **somme parziali** o **ridotte**.

**ESEMPIO:** La serie  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1) + \dots$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , ossia la serie che otteniamo dalla successione dei numeri dispari, ha come ridotte  $1, 4, 9, 16, \dots$

## 2) Serie convergente, divergente, indeterminate

- **Carattere di una serie:** è il comportamento della serie, ossia se è convergente, divergente o indeterminata.

- Una serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è:

- **Convergente** se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$  con  $s \in \mathbb{R}$ , e si scrive  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$ ;  $s$  è la **somma** della serie;

- **Divergente**
  - positivamente se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$  e si scrive  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$
  - negativamente se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$  e si scrive  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$

- **Indeterminata** se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  non esiste.

**ESEMPIO:** La **serie di Mengoli**  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  è convergente. Abbiamo calcolato che la sua somma è 1.

- **Serie geometrica di ragione q:** è la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$

Poiché  $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ , la serie è:

- Divergente se  $q \geq 1$ ;
- Convergente se  $-1 < q < 1$  (cioè  $|q| < 1$ ), con somma  $s = \frac{1}{1-q}$ ;
- indeterminata se  $q < -1$ .

## 3) Le proprietà delle serie

- **Proprietà distributiva**

Se  $c \neq 0$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$  hanno lo stesso carattere. Se sono convergenti, vale

l'uguaglianza:  $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

- **Proprietà associativa**

Data una serie *convergente* oppure *divergente*, se associamo i suoi termini in gruppi contenenti un numero finito di addendi consecutivi, otteniamo una serie che ha lo stesso carattere e la stessa somma (finita o infinita).

- Se modifichiamo l'ordine dei termini di una serie, in generale ne otteniamo un'altra che ha una somma diversa o un diverso carattere, quindi **non vale la proprietà commutativa**.

#### 4) Il criterio generale di convergenza

- **Resto  $k$ -esimo di una serie**  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ : è la serie ottenuta sopprimendo i primi  $k$  termini della serie data:  $a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$ . Indichiamo con  $r_k$  la sua somma, quando esiste.
- **Proprietà di una serie e dei suoi resti**
  - Una serie e ogni suo resto hanno lo stesso carattere
  - Se una serie converge, allora  $r_k$  tende a 0 per  $k \rightarrow +\infty$ .
  - Il carattere di una serie resta invariato se si cambia un numero finito dei suoi termini.
- **Resto parziale di posto  $n$** :  $r_{n,k} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+k}$ .
- **Condizione necessaria per la convergenza di una serie**  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

#### 5) La serie a termini positivi

- Le serie a termini positivi possono essere soltanto convergenti o divergenti.
- **Serie armonica**:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ . È una serie a termini positivi e divergente.
- **Serie minorante e maggiorante**:  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è minorante di  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  è maggiorante di  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  se  $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ .
- **Criterio del confronto di Gauss**  
Se una serie a termini non negativi ammette una serie maggiorante convergente, allora è convergente se ammette una serie minorante divergente, allora è divergente.
- **Criterio del confronto asintotico**  
Date le serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  entrambe a termini positivi, se esiste il limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$ , le due serie hanno lo stesso carattere. È inoltre vero che:
  - se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  converge, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge;
  - se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  diverge, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge.
- **Criterio del rapporto o di D'Alambert**  
Data una serie a termini positivi  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  a termini positivi, con  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  finito, se:
  - $0 \leq l < 1$ , la serie è convergente;
  - $l > 1$ , la serie è divergente;
  - $l = 1$ , non è possibile decidere il carattere della serie.
- **Criterio della radice o di Cauchy**  
Data una serie a termini positivi  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  a termini positivi, con  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$  finito, se:

- $0 \leq l < 1$ , la serie è convergente;
- $l > 1$ , la serie è divergente;
- $l = 1$ , non è possibile decidere il carattere della serie.

■ **Serie armonica di ordine  $\alpha$** :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tale serie è:

- divergente se  $\alpha \leq 1$ ;
- convergente se  $\alpha > 1$ .

## 6) La serie a termini di segno qualunque

■ **Serie a termini di segno alterno**: sono del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \text{ con } a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

■ **Criterio di Leibniz**

Se una serie a termini di segno alterno è tale che  $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , allora è convergente; inoltre vale la relazione:

$$|r_n| \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}.$$

■ **Convergenza assoluta**: la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  è **assolutamente convergente** se è convergente la

serie dei valori assoluti  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ . Una serie assolutamente convergente è anche convergente.

■ Quando una serie è convergente ma non è assolutamente convergente, si dice **semplicemente convergente**.

## 7) L'addizione e la sottrazione di due serie

■ Date le serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ , si chiama:

• **serie somma** la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots$

• **serie differenza** la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots$

■ Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  sono convergenti, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

■ Se due serie sono assolutamente convergenti, allora la serie somma e la serie differenza sono assolutamente convergenti.

■ Date due serie, se una è convergente e l'altra è divergente, allora la serie somma e la serie differenza sono divergenti.