

## LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

I problemi incontrati fin'ora nel corso di studi di matematica erano tutti di tipo numerico, cioè la loro risoluzione ha sempre portato alla determinazione di uno o più **numeri** che rappresentano la soluzione del problema stesso (vedi ad esempio la determinazione delle radici di un'equazione).

Esiste però anche un altro genere di problemi, in cui quello che si vuole determinare è la legge in base alla quale alcune variabili dipendono da altre, **vale a dire che ci sono problemi in cui l'incognita è una funzione** (le equazioni che portano alla soluzione di questo tipo di problemi si dicono per questo motivo funzionali).

Fra le equazioni funzionali rivestono particolare importanza le equazioni che coinvolgono una funzione  $f$  e le sue derivate.

### OBIETTIVO

Acquisire dei metodi che permettano di determinare le funzioni  $y = f(x)$  che, insieme alle loro derivate, soddisfano un'equazione differenziale.

### DEFINIZIONI

Si dice **equazione differenziale ordinaria** un'equazione funzionale che esprime un legame fra  $x, y = f(x)$  e almeno una delle sue derivate. Un'equazione differenziale ordinaria assume quindi la forma  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , dove  $F$  è una funzione di  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ .

Si dice **ordine** di un'equazione differenziale il massimo ordine delle derivate che in essa compaiono (una equazione differenziale è quindi del **primo ordine** se in essa compare  $y'$  ma non le derivate ad essa successive (deve esserci obbligatoriamente  $y'$  ma possono eventualmente mancare  $y$  e  $x$ ); è del **secondo ordine** se in essa compare  $y''$  ma non le derivate successive (come abbiamo già detto deve esserci  $y''$  ma possono eventualmente mancare  $y', y$  e  $x$ , ecc..)

Si dice **soluzione** o **integrale** di un'equazione differenziale di ordine  $n$  ogni funzione  $y = g(x)$ , dotata in un certo insieme  $\mathfrak{S} \in \mathfrak{R}$  di derivate fino a quella di ordine  $n$ , tale che in  $\mathfrak{S}$  sia

$$F(x, g(x), g'(x), g''(x), \dots, g^{(n)}(x)) = 0$$

cioè ogni funzione  $g$  che soddisfi l'equazione stessa.

Il grafico di  $g(x)$  si dice **curva integrale**.

**IN GENERALE, DATA UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ESISTONO INFINITE SOLUZIONI CHE DIFFERISCONO TRA LORO PER LA PRESENZA DI UNA O PIU' COSTANTI ARBITRARIE**

**QUANDO PERO' VIENE FISSATO UN PARTICOLARE VALORE PER QUESTE COSTANTI (A QUESTO SERVIRANNO QUELLE CHE CHIAMEREMO "CONDIZIONI INIZIALI") SI OTTIENE INVECE UN INTEGRALE O SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE**

## LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Una generica equazione differenziale del primo ordine assume la forma

$$F(x, y, y') = 0$$

Se poi l'equazione è scritta nella forma

$$y' = f(x, y)$$

allora si dice in **forma normale**.

Per quanto è già stato detto sappiamo che il suo integrale generale è la famiglia di funzioni  $y = g(x, c)$  e che i suoi integrali particolari si ottengono attribuendo alla costante  $c$  determinati valori (notare che è solo una la costante arbitraria, questo perché l'equazione differenziale che stiamo considerando è del primo ordine). Questi valori possono essere determinati sulla base di alcune condizioni dette "condizioni iniziali" imposte a priori dal problema.

### Esempio

Consideriamo la seguente equazione differenziale "correlata" da una condizione iniziale:

$$y' = \cos(x) \quad \text{con } y(0) = 1$$

per ricavarci la funzione  $y = f(x)$  che soddisfa l'equazione data basta semplicemente integrare entrambi i membri dell'equazione:

$$\int y' dx = \int \cos(x) dx \Rightarrow y = \sin(x) + c$$

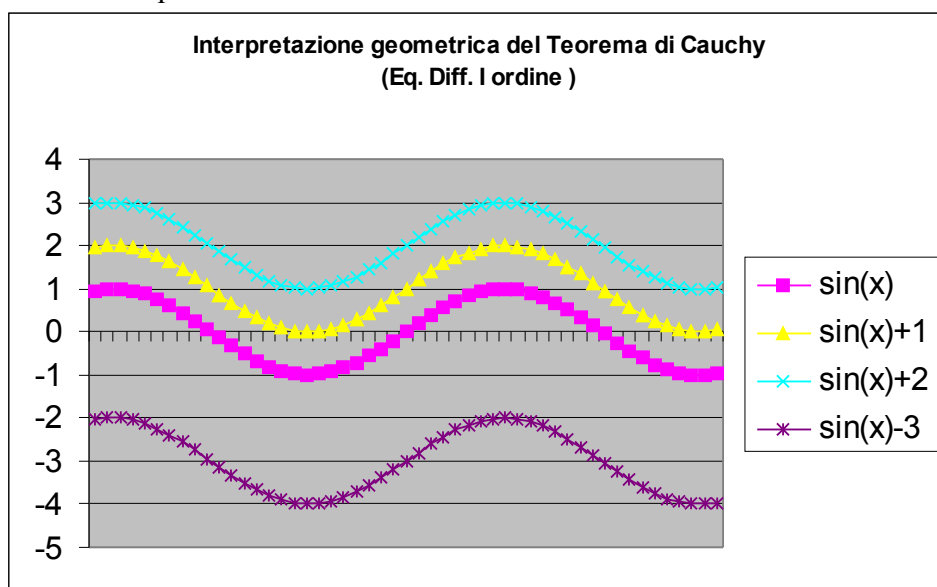
Quello che abbiamo trovato è l'integrale generale perché dipende dal valore che assumerà la costante  $c$ , per ottenere l'integrale particolare dettato dalle condizioni iniziali facciamo in modo che la soluzione trovata le soddisfi:

$$y(0) = 1 \Rightarrow \sin(0) + c = 1 \Rightarrow 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

Questo significa che l'unica soluzione del problema iniziale sarà:  $y = \sin(x) + 1$

**Esiste un Teorema detto "di Cauchy" (del quale non studieremo l'enunciato) che garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione di un'equazione differenziale con una condizione iniziale da soddisfare.**

Alla luce dell'esempio appena svolto il grafico sottostante mette in risalto qual è la famiglia di soluzioni che rappresentano l'integrale generale dell'equazione differenziale, mentre solo una delle infinite curve che avremmo potuto disegnare rappresenta la soluzione particolare imposta dalle condizioni iniziali dell'equazione.



## LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

Una generica equazione differenziale del secondo ordine assume la forma

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Se poi l'equazione è scritta nella forma

$$y'' = f(x, y, y')$$

allora si dice in **forma normale**.

Si dimostra inoltre che vale l'equivalente del Teorema di Cauchy nominato per le equazioni differenziali di primo ordine che anche in questo caso garantisce l'esistenza e l'unicità di un'integrale particolare di un'equazione differenziale del secondo ordine. La differenza sta nel fatto che ora le condizioni iniziali da soddisfare sono necessariamente 2 (il loro significato lo vedremo solo graficamente servendoci di un esempio).

### Esempio

Consideriamo la seguente equazione differenziale:

$$y'' = \cos(x)$$

per ricavarci la funzione  $y = f(x)$  che soddisfa l'equazione data basta semplicemente integrare entrambi i membri dell'equazione:

$$\int y'' dx = \int \cos(x) dx \implies y' = \sin(x) + c_1$$

due volte:

$$\int y' dx = \int (\sin(x) + c_1) dx \implies y = -\cos(x) + c_1 x + c_2$$

Quello che abbiamo trovato è l'integrale generale perché dipende dal valore che assumeranno le due costanti arbitrarie  $c_1$  e  $c_2$ , dunque in questo caso il teorema di Cauchy richiede che le condizioni iniziali da soddisfare siano proprio due, **una ad indicare che per in  $y(0)$  passa una ed una sola curva integrale e l'altra ad indicare che proprio in questo punto la curva integrale ha tangente di coefficiente angolare  $y'(0)$** .

Continuando l'esercizio, si considerino le seguenti condizioni iniziali:

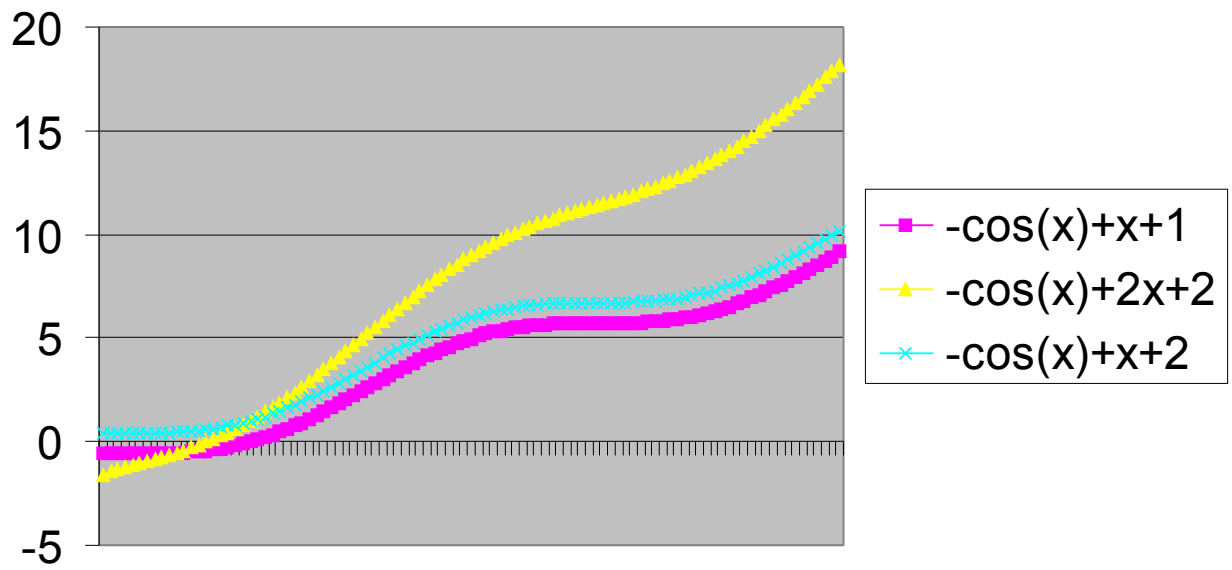
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Per ottenere l'integrale particolare dettato dalle condizioni iniziali facciamo in modo che la soluzione trovata le soddisfi entrambe:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \implies -\cos(0) + c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \implies -1 + c_2 = 0 \implies c_2 = 1 \\ y'(0) = 1 \implies \sin(0) + c_1 = 1 \implies 0 + c_1 = 1 \implies c_1 = 1 \end{cases}$$

Questo significa che l'unica soluzione del problema iniziale sarà:  $y = -\cos(x) + x + 1$

### Interpretazione geometrica del Teorema di Cauchy (Eq. Diff. II ordine)



## LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI CON LA TRASFORMAZIONE DI LAPLACE

Ci limiteremo a risolvere con questo metodo delle equazioni lineari a coefficienti costanti del primo e del secondo ordine, sfruttando la possibilità di passare dal dominio origine ( $x$ ) a quello immagine ( $s$ ) mediante la Trasformazione di Laplace, svolgere algebricamente il nostro problema in  $s$  per poi tornare a formulare la soluzione in funzione di  $x$  attraverso l'operazione di Antitrasformazione.

### DEFINIZIONI

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice **lineare** quando è di primo grado in  $y$  e  $y'$ .

Allo stesso modo un'equazione differenziale del secondo ordine si dice lineare quando è di primo grado in  $y, y'$  e  $y''$ .

Un'equazione lineare del primo ordine cioè, assumerà in linea di massima la forma seguente:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Un caso particolare di equazione differenziale lineare che capita spesso di incontrare nelle applicazioni è quello in cui la funzione  $p(x)$  è una costante, indicandola con  $P$ , l'equazione assume la forma

$$y' + Py = q(x)$$

### Esempio

Data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del primo ordine  $y' + 2y = 3e^x$  sappiamo che, in base al Teorema di Cauchy, esiste ed è unica la soluzione che soddisfa la condizione iniziale  $y(0) = 0$ .

Se applichiamo ad entrambi i suoi membri la trasformazione di Laplace, otteniamo la seguente relazione fra le funzioni trasformate:

$$L[y' + 2y] = L[3e^x]$$

per la proprietà di linearità

$$L[y'] + 2L[y] = 3L[e^x]$$

per il teorema di derivazione dell'originale possiamo poi scrivere

$$sL[y] - y(0) + 2L[y] = 3L[e^x]$$

sostituendo la C.I.

$$sL[y] + 2L[y] = 3L[e^x]$$

e svolgendo i calcoli si ottiene

$$L[y](s + 2) = 3 \frac{1}{s - 1}$$

$$L[y] = \frac{3}{(s - 1)(s + 2)}$$

giunti a questo punto, cioè dopo aver isolato  $L[y]$ , si antitrasforma per ottenere  $y$ .

N.B: il metodo è quello dell'antitrasformazione di funzioni razionali fratte, noto dalla teoria dell'antitrasformata di Laplace.

Il risultato del precedente esercizio è  $y = -e^{-2x} + e^x$ .

Allo stesso modo si può conoscere la soluzione della seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del secondo ordine:

$$y'' + 5y' + 6y = 6 \quad \text{con} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$