

Le serie di funzioni Fourier

1) Le funzioni periodiche

- **Funzione periodica di periodo T** : è una funzione $f(x)$, definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R} , per la quale esiste un numero reale T tale che $f(x+T)=f(x)$ per ogni $x \in A$, con $x+T \in A$.

2) Serie di Fourier

- Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π e si supponga che $f(x)$ sia continua, o al più dotata di un numero finito di punti di discontinuità di prima o terza specie nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. In tale ipotesi la funzione $f(x)$ risulta integrabile in tale intervallo e risultano integrabili nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ anche le funzioni :
 $f(x) \cos kx; f(x) \sin kx \quad k=1, 2, \dots$

Si chiama allora **serie di Fourier** della funzione $f(x)$, la serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \text{i cui coefficienti sono dati dalle seguenti formule}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad k=1, 2, 3, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Tali coefficienti sono anche detti **coefficienti di Fourier** della funzione $f(x)$.

■ Teorema di Dirichlet :

Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π . Se $f(x)$ ha nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ un numero finito di punti di discontinuità di prima o terza specie, e se tale intervallo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli parziali, in ciascuno dei quali $f(x)$ sia monotona, allora la serie di Fourier di $f(x)$ converge per qualunque valore di x , e precisamente :

1) Se $f(x)$ è continua per $x=x_0$, la sua serie di Fourier converge, per $x=x_0$, al valore $f(x_0)$. In particolare se $f(x)$ è continua per qualunque valore di x , la sua serie di Fourier converge a $f(x)$ per qualunque x .

2) Se x_0 è un punto di discontinuità di prima specie per $f(x)$, allora, posto
 $f_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x); f_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, la serie di Fourier di $f(x)$ converge, per $x=x_0$, al valore $\frac{f_-(x_0) + f_+(x_0)}{2}$.

3) Se x_0 è un punto di discontinuità di terza specie per $f(x)$, allora la serie di Fourier di $f(x)$ converge, per $x=x_0$, al valore del limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

- Ricordiamo che una funzione $f(x)$ si dice **pari** per ogni x del suo dominio, se si ha $f(-x)=f(x)$ e si dice **dispari** se risulta $f(-x)=-f(x)$.

- Si verifica facilmente che **il prodotto di due funzioni pari è una funzione pari; il prodotto di due funzioni dispari è una funzione pari; il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari è una funzione dispari.**

- **Funzione pari :**

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \rightarrow a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \rightarrow a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0$$

- **Funzione dispari :**

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \rightarrow b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

- **Serie di Fourier di funzioni con periodo 2l**

La serie di Fourier di una funzione $f(x)$ periodica con **periodo** $2l \neq 2\pi$ è :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \text{ con}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \left(\cos \frac{k\pi x}{l} \right) dx$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \left(\sin \frac{k\pi x}{l} \right) dx$$

Se nell'intervallo $[-l; l]$, la funzione soddisfa le ipotesi del criterio di Dirichlet, allora essa ammette lo sviluppo in una serie di Fourier.